ISTITUTO D'ISTRUZIONE SUPERIORE " *VERONA - TRENTO*"

I.T.T."VERONA TRENTO" - I.PIA."MAJORANA"

MEIS027008 IST. D'ISTRUZ. SUPERIORE IITI "VERONA TRENTO" MESSINA

Via U. Bassi Is. 148 - Tel. 090.29.34.854 - 090.29.34.070 - Fax 090.69.62.38 MEIS027008@ISTRUZIONE.IT

98123 **M E S S I N A**

Circ. n . 272

I.I.S. "VERONA TRENTO"
MESSINA
Prot. 0003809 del 04/05/2018
04-01 (Uscita)

Al Personale Docente

Agli Alunni delle classi V D e V I

Alle Famiglie

Presso le proprie SEDI

OGGETTO: **comunicazioni C.O.P.**

Il C.O.P. comunica agli alunni e ai docenti delle classi V D e V I che il **9 maggio** p.v., alle ore 9, presso **Aula Magna del Cospecs** (Via concezione n.6) si terrà **l'esame relativo alla lezione universitaria di italiano** tenuta dal Prof. Dario Tomasello in data 16 aprile 2018.

Il **10 maggio** p.v., alle ore 9, presso **Aula EX Chimica del Diparimento di Giurisprudenza (aula nella quale abbiamo già svolto lezione di Matematica e test Amos)** si terrà **l'esame relativo alla lezione universitaria di Matematica,** tenuta lo scorso 12 aprile dai Proff. Anello e Utano del Dipartimento MIFT del nostro Ateneo.

Si prega di comunicare alla referente prof.ssa R.Tornese l'elenco con i nominativi degli studenti che sosterranno l'esame in modo da approntare il registro per la firma e il relativo modulo per la registrazione del voto dell'esame, che sarà espresso in trentesimi.
Trovate, in allegato, il materiale didattico di matematica predisposto dai docenti con preghiera di riferire agli studenti le seguenti indicazioni:

1. **non lasciarsi intimorire dal numero di pagine**, perché comprendono molti grafici di funzioni,
2. **ciascuno di loro deve leggere, possibilmente, tutte le note e poi scegliere un argomento a piacere**, che sarà oggetto della brevissima discussione finale con i docenti.

IL Dirigente Scolastico

Simonetta Di Prima

Firma autografa sostituita a mezzo stampa

ai sensi dell'art. 3 co. 2 del D. Lgs. n. 39/1993

Dario Tomasello

APPUNTI SU QUASIMODO TRA SIMBOLISMO, ERMETISMO E IMPEGNO

Forse, il vero grande problema di fondo della poesia italiana primo novecentesca riguarda il rapporto mancato con il simbolismo europeo. Al di là, infatti, di una rapsodica attrazione, formalmente costituita dal contributo di Gian Pietro Lucini e di Romolo Quaglino, la presenza passeggera del fenomeno simbolista è più attribuibile alla diatriba intorno al verso libero, che prende corpo già con i *Semiritmi* capuaniani del 1888 per poi culminare con l'*Enquête* di Filippo Tommaso Marinetti del 1909, e, soprattutto, al fiorire inconsulto di numerose iniziative periodiche dall'afferenza regionale eppure dotate di consapevolezza più vasta.

In tal senso, le riviste nate a Messina tra il 1900 e il 1908, anche e soprattutto sulla scorta della presenza di Pascoli nel nostro Ateneo (dal 1898 al 1903) costituiscono il nerbo di una stagione simbolista, altrimenti piuttosto opaca sul piano nazionale. In questo *milieu*, lacerato dalla ferita del sisma del 1908 e rinnovato dal dogmatico ottimismo futurista, cresce e matura la formazione del primo Quasimodo. Nel vivo di un circolo che aveva partorito «La Balza» e il «Nuovo Giornale Letterario» condiviso dal futuro poeta con l'indomito Francesco Carrozza del Fascio Futurista, a lungo irriducibile al Regime, di S. Lucia del Mela. Un clima, attraversato da traiettorie stilistiche ed ideologiche ambivalenti, tutte comunque all'insegna di una salda consapevolezza delle poetiche più innovative del nuovo secolo.

In fondo anche l'unica tavola parolibera (*Sera d'estate*, in «L'Italia futurista», II, 31, 1917, p.8) pubblicata dall'allora giovanissimo Salvatore Quasimodo si offre come un campione, direttamente dal vivo della realtà letteraria isolana, del persistente canone simbolista che avrebbe a lungo riverberato i suoi effetti sulla produzione del poeta siciliano. Al di là dell'assetto formale, rispondente in modo generico agli stilemi paroliberi, il lessico e la sintassi riflettono l'appartenenza quasimodiana al *milieu* consueto: «Scaglie di vetro iridescenti / lutto celeste […] fra l'anime degli alberi». Lo stesso Quasimodo ha raccontato molti anni dopo: «Ricordo che una sera dell'estate del 1917, io stavo seduto con alcuni amici fra i quali Salvatore Pugliatti e Giorgio La Pira, e in uno degli intervalli dell'orchestrina composta di donne, avevo scritto per vincere la noia su un pezzo di carta da gelati la composizione futurista. Era un gioco lirico», (S. Quasimodo, *Poesie e discorsi sulla poesia*, Mondadori, Milano, 1971, p. 954).

Il fatto che si possa essere trattato di un *divertissement* adolescenziale del futuro premio Nobel non ridimensiona la portata di alcune intuizioni, capaci di trovare nuovi ribadimenti nelle liriche di Quasimodo. Come, ad esempio, nel caso dell'aggettivo «celeste» che designa il «lutto» e anche nei successivi esiti quasimodiani sarà utilizzato per qualificare il campo semantico della morte e del dolore: «sui morti splendono stimmate celesti» (S. Quasimodo, *Insonnia*, in *Erato e Apòllion*, in *Tutte le poesie*, Mondadori, Milano, 1995, p. 86).

Il filo che collega Quasimodo al canone simbolista è tutt'altro dunque che tenue e trova nuove, inusitate, rispondenze nei debiti accumulati dalla successiva produzione poetica degli autori messinesi. È il caso di Bartolo Cattafi che per quanto riguarda il lemma cruciale, e di vaga ascendenza esoterica, «centro», richiama una matrice prettamente quasimodiana, come dimostra questa pur sommaria campionatura di versi tratti dalla raccolta *Acque e terre*: «Uguale raggio mi chiude / in un centro di buio», da *Spazio*; «le foglie e le ghiande si chetano dentro, / e ognuna ha i suoi cerchi d'un unico centro» da *Acquamorta*. Quest'ultimo esempio offre un motivo d'interesse supplementare perché fornisce alla lirica cattafiana, attraverso un'immagine meramente naturalistica, l'occasione di sviluppare in profondità, nel vorticare centripeto dei cerchi, l'ansia dello svelamento di una verità più profonda di un *cuore* o di una *polpa* del mondo «verde, fertile, untuosa», da *Libero e triste*; «viaggia assieme all'anima / fredda dei gabbiani / assieme al cuore fecondo», da *L'agave*; «quando il falco ha fatto il suo viaggio / dal pugno a un cuore» da *Prince's* *street*; «drappelli d'uomini e di bestie / verranno ancora a imprimere / un transito nel mondo, / all'alba ignari sul nero / cuore del mondo», da *Antracite*. Così, si legga in Quasimodo: «Ha pure un suo nido il mio cuore / sospeso nel buio, una voce; / sta pure in ascolto, la notte», da *Rifugio d'uccelli notturni* in *Acque e terre*; «Così, come su acqua allarga / il ricordo i suoi anelli, mio cuore; / si muove da un punto e poi muore», da *Acquamorta* in *Acque e terre*; «da secoli l'erba riposa / il suo cuore con me», da *Riposo dell'erba* in *Oboe sommerso*. Così, la caratura di una superba genealogia dello Stretto si gioca, ancora una volta, negli anditi riposti e pulsanti del suo cuore simbolista.

Nella poesia di Quasimodo c'è qualcosa che, in un certo senso, rintraccia, a partire proprio dal simbolismo, la possibilità di attingere, tramite il verso, all'Assoluto.

Non è per caso che, da una parte, la scaturigine pascoliana (presente, come si è detto, nella memoria vivida del passaggio del grande poeta romagnolo all'Università di Messina nell'ultimo scorcio del XIX secolo) e, dall'altra, il magistero dannunziano (esplicito financo nella dedica a D'Annunzio del poemetto giovanile *Il fanciullo canuto*), evidenzino questo anelito.

Si tratta di una vocazione che si amplifica nell'adesione all'Ermetismo cui, più propriamente (rispetto a Ungaretti e Montale), la poesia quasimodiana può ascriversi, anticipando di fatto, in *Acque e terre* (Solaria, 1930); *Oboe sommerso* (Circoli, 1932); *Erato e Apòllion* (Scheiwiller, 1936) quella sintesi indissolubile di letteratura e vita, dichiarata nel 1938 da Carlo Bo nell'articolo programmatico *Letteratura come vita*, uscito sulla rivista "Il Frontespizio", il 9 settembre 1938: «La nostra letteratura sale dalle origini centrali dell'uomo [...]. È la vita stessa, e cioè la parte migliore e vera della vita [...] lo scrittore chieda al suo testo la verità che l'urge interiormente e per cui sente di dover scrivere [...]. Quando si parla di letteratura come vita, non si chiede che un lavoro continuo e il più possibile assoluto di noi in noi stessi, una coscienza interpretata quotidianamente nel gioco delle nostre aspirazioni, dei sentimenti e delle sensazioni».

Per Quasimodo, d'altronde, è solo nella poesia che questa assolutezza può essere raggiunta e vissuta. Nelle *Lettere d'amore a Maria Cumani* (1936-1959, Mondadori, 1973), si avverte molto bene questa tensione quasimodiana verso una poesia totale: «Io tutta la vita ho cercato il ritmo perfetto, chiuso; quello che non ammette un ritardo nella sua folgorazione», le scrive il poeta il 4 gennaio 1937. E ancora pochi giorni dopo, il 14 gennaio: «Quei versi che t'ho trascritti sono già martoriati e devono raggiungere la perfezione».

La folgorazione, a lungo ricercata, prorompe nell'andatura epigrammatica dei versi più celebri («Ognuno sta solo sul cuor della terra/ trafitto da un raggio di sole, / ed è subito sera») che, da *Acque e terre*, trovano suggello nella raccolta eponima pubblicata per Mondadori nel 1942, ma è destinata a sciogliersi nel canto più disteso di *Giorno dopo giorno* (Mondadori, 1947) in cui la voce si fa urgente rubrica dei mali del mondo, appena trascorsi nel secondo conflitto mondiale. Così, per esempio, negli endecasillabi sciolti di *Alle fronde dei salici*, in cui l'apertura sembra alludere ad una tormentata *excusatio* di fronte al lungo, pregresso, silenzio: «E come potevamo noi cantare / con il piede straniero sopra il cuore,» e rimanda alla fonte rappresentata dal *Salmo* 136 da cui proviene l'immagine icastica delle cetre abbandonate che suggerirà al poeta il titolo del componimento: «Ai salici, in mezzo ad essi, /appendemmo le nostre cetre» divenuta poi in Quasimodo: «Alle fronde dei salici, per voto, / anche le nostre cetre erano appese, /oscillavano lievi al triste vento».

Il "silenzio" di Quasimodo, in realtà, durante gli anni della guerra è gravido di impegni. Innanzitutto, come traduttore. Una dedizione al lavoro altrui, ai propri modelli letterari che troverà ribadimento negli anni successivi. Da Omero a Shakespeare, da Neruda a Molière, Quasimodo rintraccia nei propri numi tutelari, tra i quali naturalmente spiccano i *Lirici greci* tradotti già nel 1940 per le edizioni di Corrente, linfa e conferma del mestiere di poeta.

«L'uomo vuole la verità dalla poesia, quella verità che egli non ha il potere di esprimere e nella quale si riconosce, verità delusa o attiva che lo aiuti nella determinazione del mondo, a dare un significato alla gioia o al dolore in questa fuga continua di giorni, a stabilire il bene e il male, perché la poesia nasce con l'uomo, e l'uomo nella sua verità non è altro che bene più male». Così scrive Quasimodo in *L'uomo e la poesia* nel 1946.

La poesia, allora, diviene atto di fede, strumento che riscatta la vita che *non è sogno*, come recita il titolo della raccolta mondadoriana del 1949, in cui si trova *Lettera alla madre* che un Quasimodo trepidante e quasi intimidito pronuncia in un filmato d'epoca davanti alle telecamere che lo avevano seguito a casa in occasione dell'evento del Nobel per la letteratura, assegnatogli nel 1959 (https://www.youtube.com/watch?v=lT_zqffk0oY) .

Se è vero che la poesia è tutto per Quasimodo e, dunque, soprattutto in un caso eclatante come questo, non è scindibile dal corpo che la dice, con le sue pause e con una postura che reclama protezione e accoglienza persino nel momento dell'apoteosi, sarà il caso di soffermarsi sulla performance poetica di un grande autore, rintracciandovi una cartina di tornasole non indifferente rispetto agli esiti che la lirica stessa esibisce.

Lo studioso statunitense Richard Schechner ci ha insegnato che praticamente «qualsiasi cosa può essere studiata come se fosse una performance» (*Performance Studies. An Introduction*, Routledge 2013). Abituarsi a pensare il nostro ambito di studio (quale che sia: dalla letteratura alla scienza alla storia etc.) in una modalità performativa può essere un grande ausilio per uscire dagli eccessi dell'astrazione e inscrivere la nostra capacità d'osservazione e d'ascolto in una relazione concreta e dinamica con l'oggetto del nostro analisi.

La poesia che, persino nella modernità più estrema, non ha perduto la sua timbratura orale originaria, non solo non fa eccezione rispetto a questa intuizione schechneriana, ma sembra un'area particolarmente idonea alla sua applicazione. A patto però che i versi non si ritengano repertorio sganciato dall'autore che li ha prodotti, tramandoli nell'esperienza del proprio vissuto e nella fisicità della propria identità.

In questa lettura quasimodiana di *Lettera alla madre*, si può segnalare: la voce pacata e come trattenuta, la bocca socchiusa quasi a fare da contraltare all'*ore rotundo* (non disdegnato, in realtà dal poeta), la testa che oscilla appena alla scansione più perentoria dei versi, gli occhi bassi sul foglio che si sollevano solo quando significativamente si arriva al punto in cui la poesia recita «per tutti quelli che come te aspettano / e non sanno che cosa».

Si potrebbe continuare, scoprendo, ben al di là di una vieta aneddotica, in quei gesti e in quella intonazione molti altri segreti dell'*intentio* e dell'*inventio* poetica quasimodiana.

Per concludere, lungo la diacronia della produzione quasimodiana, vorrei segnalare *Un arco aperto* (da *La terra impareggiabile*, Mondadori, 1958) in cui riemerge, prepotente, un motivo ispiratore della maestria pascoliana, a cui avevamo già fatto riferimento. Si tratta dell'onomatopeico «chiù» che, dal pascoliano *L'assiuolo* (*Myricae*, 1891), si trasmette, chiarendosi e complicandosi, al contempo, nel dettato quasimodiano, fortemente intessuto di allitterazioni: «Non sa la morte mentre muore / il canto chiuso del chiù».

Nonostante quanto dicevamo in principio a proposito dell'impatto della poesia quasimodiana su alcuni autori coevi e successivi nel *milieu* dello Stretto, nella genealogia poetica italiana, l'esempio dell'artista siciliano non sembra aver trovato generosi riconoscimenti nelle nuove generazioni. Cosa pesi di più in questa progressiva rarefazione della sua voce, non è facile dirlo. Di sicuro, le accuse di affettazione che sono state rivolte a Quasimodo, in particolare dopo la vittoria del Nobel, sembrano sospette o addirittura ingiuste, se si pensa in particolare al nitore e al valore efficace di denuncia (ammesso che questa parola abbia ancora senso oggi) di versi come questi: «Mi sembra di essere un emigrante / che veglia chiuso nelle sue coperte, / tranquillo, per terra» (*Ho fiori e di notte invito i pioppi*, in *Dare e avere*, Mondadori, 1966).

Brevi note su

Studio di funzioni

Progetto

Percorsi orientativi di inclusione

Messina

ANNO SCOLASTICO 2017/2018

Studio di funzioni

Relazioni e funzioni

Il concetto di funzione nasce, dal punto di vista fisico, per descrivere matematicamente grandezze variabili (posizione di un oggetto in movimento, temperatura in una stanza, ...). Per descrivere una grandezza variabile occorre precisare rispetto a cosa avviene la sua variabilità ; ad esempio, la posizione di un oggetto in movimento varia al variare del tempo, cosí come la velocità di un'automobile. Questa dipendenza segue, di volta in volta, una legge matematica.
Se un oggetto pesante viene lasciato cadere da una certa altezza, lo spazio percorso dall'oggetto varia con il tempo, seguendo la legge:

$$s(t) = \frac{1}{2}gt^2$$

con g accelerazione di gravità .
Formalizziamo il concetto di funzione tra due insiemi.
Siano A e B due insiemi e G un sottoinsieme del prodotto cartesiano
$A \times B = \{(a, b)|a \in A, b \in B\}$.
La coppia

$$\mathcal{R} = (A \times B, G)$$

è detta **relazione** tra A e B avente grafico G. Se la coppia $(x, y) \in G$ si dice che y è il corrispondente di x nella relazione $\mathcal{R}$.
Una relazione

$$f = (A \times B, G)$$

tra gli insiemi A e B si dice un'**applicazione o funzione** di A in B se, per ogni $x \in A$ esiste uno ed uno solo $y \in B$ (dipendente in generale da x) tale che $(x, y) \in G$.
Per ogni $x \in A$ l'unico $y \in B$ tale che $(x, y) \in G$ è denotato con il simbolo $f(x)$ ed è detto immagine di x mediante f o valore assunto da f in x.
Per indicare una funzione di A in B si usa una delle seguenti scritture:

$$f : A \longrightarrow B, \quad A \xrightarrow{f} B, \quad x \in A \mapsto f(x) \in B$$

A e B si dicono rispettivamente **dominio** e **codominio** di f.
Una funzione $f : A \longrightarrow B$ si dice **iniettiva** se ad elementi distinti di A fa corrispondere elementi distinti di B.
Una funzione $f : A \longrightarrow B$ si dice **suriettiva** se ogni elemento di B è immagine di almeno un elemento di A.
Esempio. Le funzioni

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad n \in \mathbb{N} \mapsto a_n \in \mathbb{R},$$

dove $\mathbb{N}$ è l'insieme dei numeri naturali e $\mathbb{R}$ è l'insieme dei numeri reali, si dicono **successioni**.
Ci soffermeremo nello studio di funzioni

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

reali di variabile reale, con il dominio D sottoinsieme di $\mathbb{R}$. Per queste funzioni introduciamo alcune nozioni che non sempre hanno significato per funzioni di tipo più generale:

- Funzioni limitate
- Funzioni simmetriche
- Funzioni periodiche.

Funzioni limitate

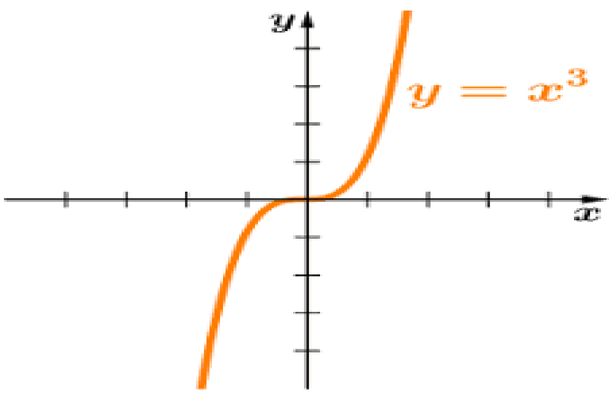
Se il grafico di una funzione $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ è contenuto nel semipiano inferiore delimitato da una retta parallela all'asse delle ascisse, ad esempio di equazione $y = M$, la funzione si dirà **limitata superiormente**. Ciò significa che

$$f(x) \leq M \qquad \textbf{per ogni}\, x \in D.$$

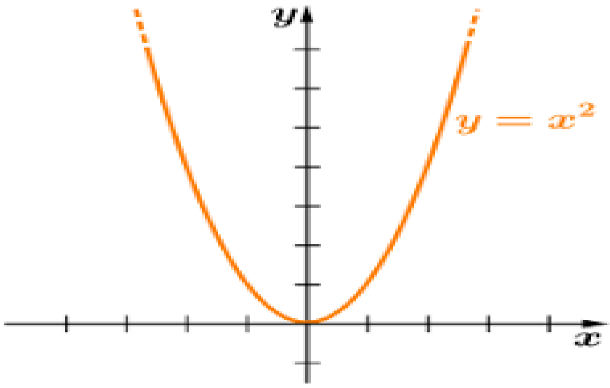
Analogamente f si dirà **limitata inferiormente** se il suo grafico è contenuto nel semipiano superiore delimitato da una retta $y = m$ parallela all'asse delle ascisse, cioè

$$f(x) \geq m \qquad \textbf{per ogni}\, x \in D.$$

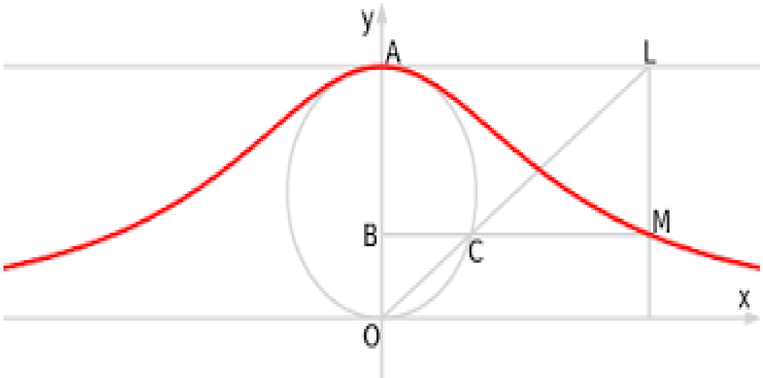
Una funzione si dirà **limitata** se è lo è sia superiormante che inferiormente. Il grafico di una funzione limitata è contenuto in una striscia orizzontale del piano xy.
La funzione $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^3 \in \mathbb{R}$ non è limitata né superiormente né inferiormente, è iniettiva e suriettiva.
Il suo grafico è :



La funzione $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$ è limitata inferiormente, non è iniettiva né suriettiva.
Il suo grafico è :



La funzione $f : x \in \mathbb{R} \mapsto -x^2 \in \mathbb{R}$ è limitata superiormente.
La funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2},$ nota come la **versiera di Agnesi**, è limitata. Il suo grafico è il seguente:



Funzioni simmetriche

I grafici di alcune funzioni presentano proprietà di simmetria.
Le funzioni che hanno il grafico simmetrico rispetto all'asse delle ordinate si dicono **funzioni pari**. Hanno un dominio simmetrico rispetto all'asse y (equazione $x = 0$) e soddisfano la relazione:

$$f(-x) = f(x),$$

cioè sono uguali le ordinate dei punti di ascisse x e $-x$, opposte rispetto all'asse di equazione $x = 0$.
Ad esempio la funzione $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$, il cui grafico è una parabola con vertice nell'origine e concavità rivolta verso l'alto, è una funzione pari.
Le funzioni che hanno il grafico **simmetrico rispetto all'origine** si dicono **funzioni dispari**. Hanno dominio simmetrico rispetto alla retta $x = 0$ e soddisfano la relazione

$$f(-x) = -f(x).$$

Ad esempio la funzione $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^3 \in \mathbb{R}$ è una funzione dispari.
Osserviamo che **una funzione non può avere il grafico simmetrico rispetto all'asse delle** x perchè una curva con tale simmetria non può essere il grafico di una funzione, venendo meno l'univocità della funzione.

Funzioni periodiche

Una funzione $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, non costante, si dice **periodica di periodo** $T > 0$ se T è il più piccolo numero reale positivo tale che

$$f(x+T) = f(x) \qquad \textbf{per ogni}\, x \in D.$$

Ogni intervallo di lunghezza T, contenuto nel dominio, si dice **intervallo di periodicità**
Basterà disegnare il grafico della funzione in un intervallo di periodicità qualsiasi per poter disegnare il grafico di f su tutto il dominio.
Sono funzioni periodiche:
la funzione $x \mapsto senx$, con periodo $T = 2\pi$;
la funzione $x \mapsto tgx$, con periodo $T = \pi$.

Studio di funzioni

Per studio di funzione si intende quell'insieme di procedure che hanno lo scopo di analizzare una funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ al fine di determinarne alcune caratteristiche qualitative. Uno studio di funzione correttamente condotto permette di tracciare il grafico della funzione. L'obiettivo finale di uno studio di funzione è quello di riuscire a rappresentare, con la migliore approssimazione possibile, il grafico della funzione sul piano cartesiano.
Illustriamo di seguito i passi da seguire per lo studio di funzione:

1. **Determinazione del dominio D della funzione.**
   Per realizzare questo primo passo è importante conoscere i domini delle funzioni elementari che compongono la nostra funzione.

2. **Determinazione di eventuali simmetrie e periodicità .**
   Se la funzione è simmetrica rispetto all'asse y (funzione pari),
   $f(x) = f(-x)$
   o rispetto all'origine (funzione dispari),
   $f(-x) = -f(x)$,
   basterà proseguire lo studio per x positive, $x \geq 0$, semplificando così i calcoli.
   Lo stesso vale per le funzioni periodiche di periodo T, che possono essere studiate in un intervallo di ampiezza T.

3. **Determinazione delle intersezioni con gli assi.**
   Se $x = 0 \in D$ si risolve il sistema

   $$\begin{cases} y &= f(x) \\ x &= 0 \end{cases}$$

   per determinare l'eventuale punto di intersezione della curva con l'asse y.
   Gli eventuali punti di intersezione con l'asse x si determinano risolvendo il sistema

   $$\begin{cases} y &= f(x) \\ y &= 0 \end{cases} .$$

4. **Studio del segno della funzione.**
   Ponendo per convenzione

   $$f(x) > 0$$

si trovano gli intervalli di ascisse x per i quali la funzione è positiva (il suo grafico appartiene al semipiano sopra l'asse x) e, di conseguenza per esclusione, anche quelli per i quali è negativa (il suo grafico appartiene al semipiano sotto l'asse x).

5. **Calcolo dei limiti.**
   Bisogna stabilire come la funzione si comporta quando si avvicina agli eventuali punti di discontinuità x_0 della funzione, calcolando i limiti del tipo
   $$\lim_{x \to x_0} f(x).$$
   Se accade che
   $$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$
   si determina un asintoto verticale, la retta $x = x_0$.
   Inoltre bisogna stabilire come la funzione si comporta, nel caso il dominio lo richieda, quando x tende all'infinito:
   $$\lim_{x \to \infty} f(x).$$
   Se si ottiene
   $$\lim_{x \to \infty} f(x) = \ell$$
   allora la retta $y = \ell$ è un asintoto orizzontale. Se
   $$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty,$$
   ma
   $$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$$
   è finito, allora, se
   $$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x},$$
   $$q = \lim_{x \to \infty} [f(x) - mx],$$
   la retta di equazione
   $$y = mx + q.$$
   è un asintoto obliquo.

6. **Determinazione dei punti di massimo, minimo, e flessi: studio del segno delle derivate.**
   Si calcola la derivata prima
   $$f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$
   Si studia il segno della derivata prima risolvendo la disequazione
   $$f'(x) \geq 0.$$
   Negli intervalli in cui la derivata è positiva la funzione f è crescente, negli intervalli in cui la derivata è negativa la funzione f è decrescente; nei punti in cui la derivata si annulla abbiamo, per la nostra funzione f, dei punti di massimo, minimo, o flesso

a tangente orizzontale.
Successivamente si calcola la derivata seconda

$$f''(x)$$

e si studia il segno della derivata seconda risolvendo la disequazione

$$f''(x) \geq 0$$

Negli intervalli in cui la derivata seconda è positiva la funzione f è convessa, volge cioè la concavità verso l'alto, negli intervalli in cui la derivata seconda è negativa la funzione f risulta concava; nei punti in cui la derivata seconda si annulla si determinano gli eventuali punti di flesso a tangente obliqua.

Funzioni elementari

Esaminiamo alcune delle più importanti funzioni analitiche, di cui evidenziamo le principali proprietà ed il loro uso in contesti applicativi.
Funzioni potenza
Diciamo funzioni potenza funzioni del tipo

$$x \mapsto f(x) = kx^{\alpha}$$

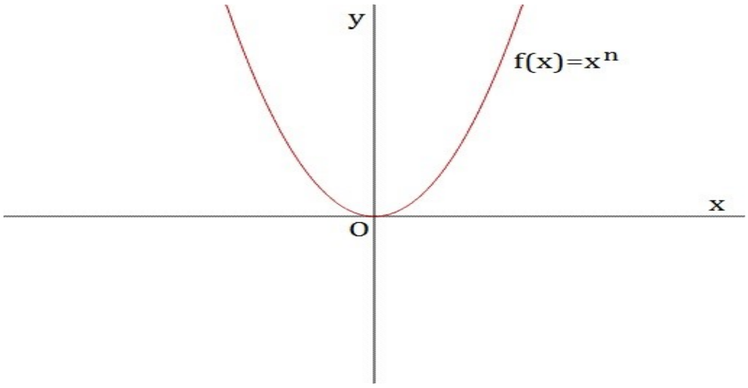
con k e α numeri reali, $\alpha \neq 0$.
Queste funzioni sono definite per

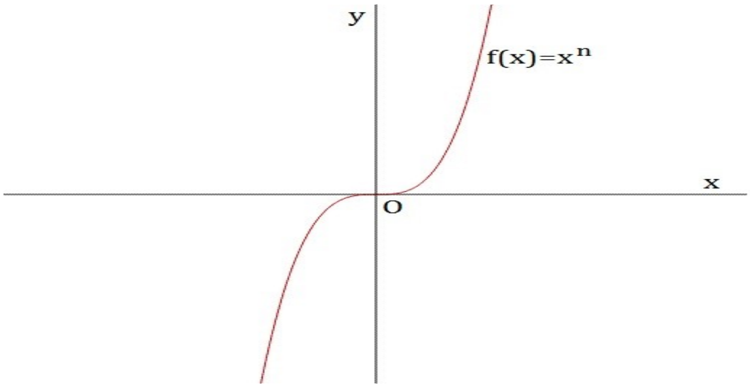
- $x \geq 0$ se $\alpha > 0$,
- $x > 0$ se $\alpha < 0$.

In questa funzione l'immagine $f(x)$ di x è proporzionale ad x^{α} secondo la costante di proporzionalità k.
Esempi tratti dalla Fisica.

- Moto rettilineo uniforme
  La legge
  $$s(t) = vt$$
  esprime la proporzionalità dello spazio percorso rispetto al tempo impiegato a percorrerlo, nel moto rettilineo uniforme. La costante di proporzionalità è la velocità .
- Trasformazioni isoterme
  In una trasformazione, a temperatura costante, di una mole di un gas ideale, pressione e volume del gas sono legati da:
  $$p(V) = \frac{RT}{V} = RTV^{-1},$$
  cioè p è inversamente proporzionale a V secondo la costante RT, con $R = 1,986$ cal/K e T è la temperatura assoluta.

I due grafici che seguono si riferiscono alla funzione potenza rispettivamente con esponente pari e dispari.





Funzioni esponenziali e logaritmiche

Questa classe di funzioni descrive i fenomeni di decadimento o di crescita, come ad esempio il decadimento radioattivo, il processo di raffreddamento di un corpo, il diffondersi di un'infezione o il poliferare di una colonia di batteri.
Se a è un numero reale positivo diverso da 1, $a > 0, a \neq 1$,

- la funzione $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \log_a x$$

  si dice **funzione logaritmo in base** a;

- la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto a^x$$

  si dice **funzione esponenziale in base** a.

Grafico della **funzione logaritmo con** $a > 1$:

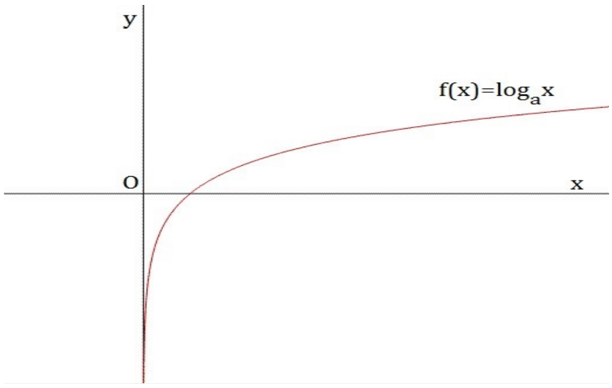


Grafico della **funzione logaritmo con** $0 < a < 1$:

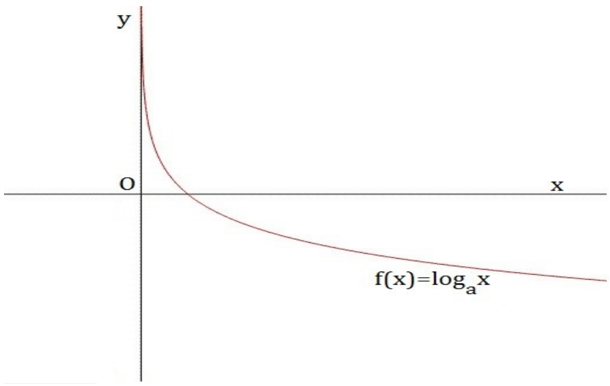


Grafico della **funzione esponenziale con** $a > 1$:

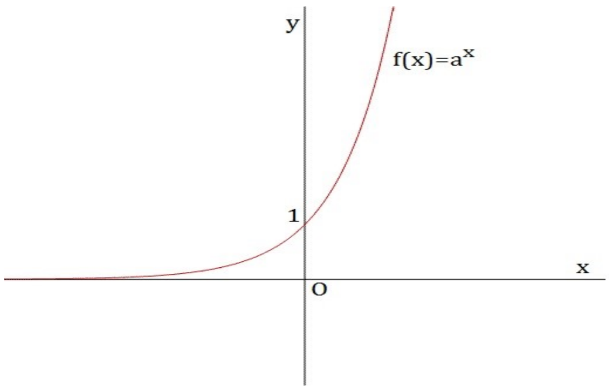
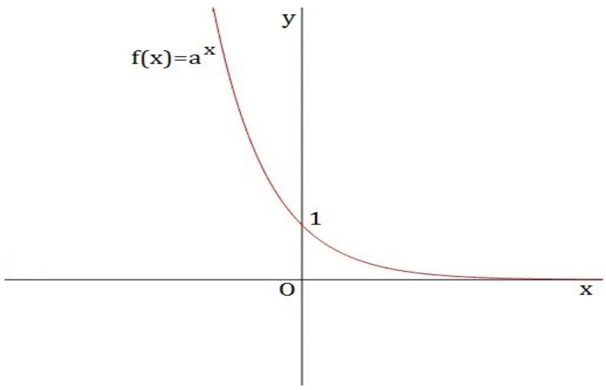


Grafico della **funzione esponenziale con** $0 < a < 1$:



Le funzioni $f : x \mapsto \log_a x$ e $g : x \mapsto a^x$ sono legate dalla relazione:

$$x = a^{\log_a x} \qquad (x > 0,\ a > 0,\ a \neq 1)$$

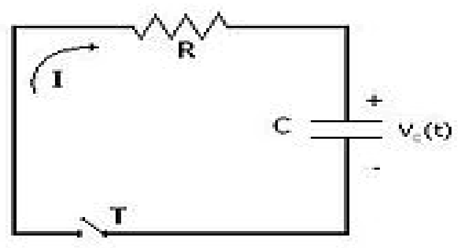
cioè

$$y = \log_a x \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = a^y.$$

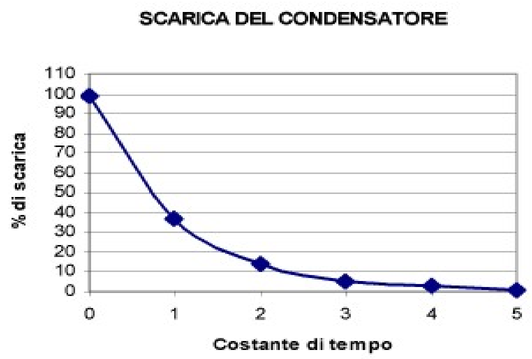
Se accade che la base a sia il numero e di Nepero, una costante che vale circa $2,7$, le funzioni relative hanno i grafici caratteristici delle funzioni esponenziali e logaritmiche con base $a = e > 1$.
Esempio tratto dalla Fisica.
In un circuito con resistenza R in cui sia inserito un condensatore di capacità C, la carica $q(t)$ è data dall'espressione:

$$q(t) = Qe^{-\frac{t}{\tau}},$$

dove Q è la carica iniziale al tempo $t = 0$ e $\tau = RC$.
Dato un circuito RC



la carica sul condensatore diminuisce secondo la legge esponenziale il cui grafico è

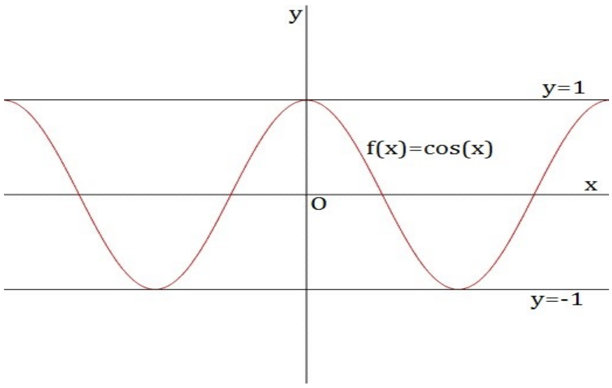


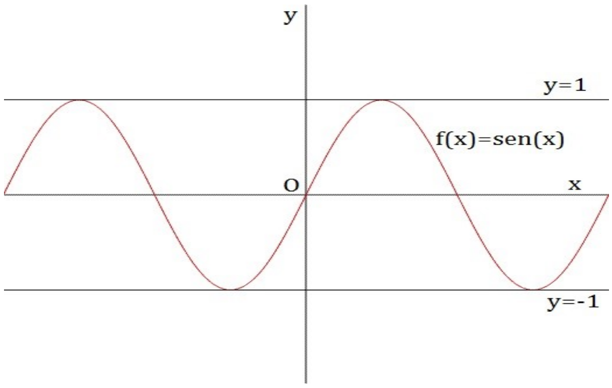
Funzioni circolari o trigonometriche

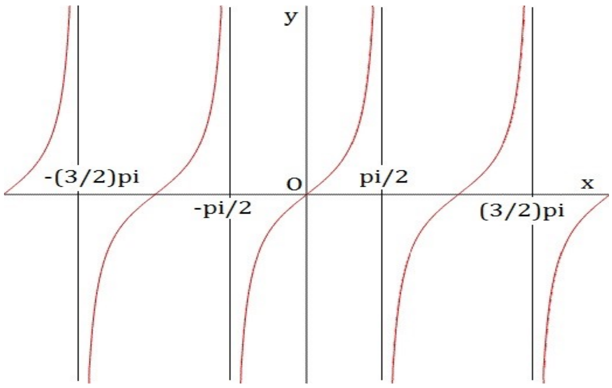
Questa classe di funzioni descrive i fenomeni periodici, ad esempio il moto dei pianeti, la propagazione di onde (meccaniche o elettromagnetiche), il moto di un pendolo, certi andamenti di malattie influenzali di carattere stagionale, ...
Le **funzioni trigonometriche elementari** sono:

$$x \mapsto \cos x, \quad x \mapsto \sin x, \quad x \mapsto tgx, \quad x \mapsto cotgx.$$

I grafici delle prime tre funzioni sono:

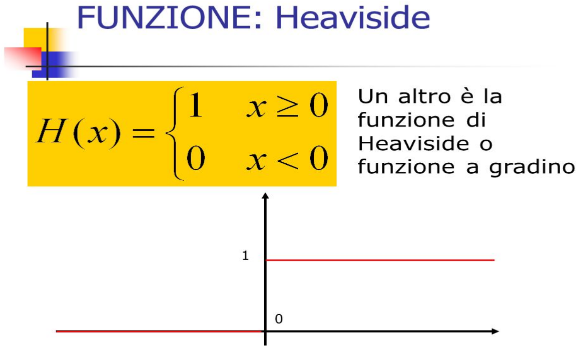






Funzioni definite a tratti

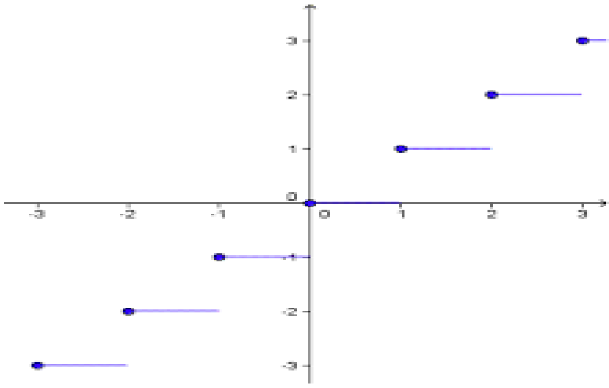
A partire dalle funzioni elementari si possono definire nuove funzioni, usando definizioni diverse su intervalli diversi.
Esempio. Funzione di Heaviside o funzione gradino



Funzione parte intera e funzione mantissa

Concludiamo questo elenco di funzioni con:

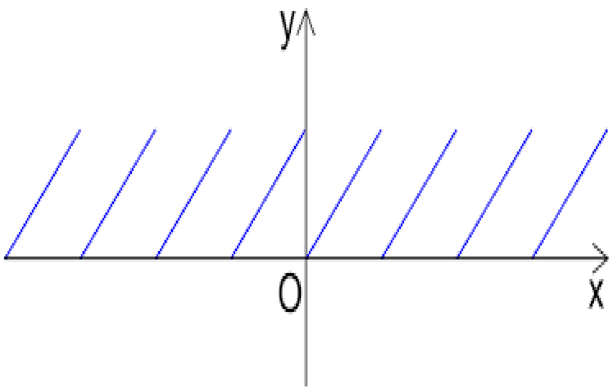
1. **funzione parte intera o floor**, che è la funzione che associa ad ogni numero reale x il più grande intero minore o uguale a x: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad x \mapsto [x]$, il cui grafico è :



2. **funzione mantissa**, che è così definita:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad x \mapsto x - [x].$$

   La mantissa di un numero reale è dunque un numero reale compreso tra 0 e 1, in $[0, 1)$ e il grafico di tale funzione è :



Operazioni sui grafici

Conoscendo il grafico di una funzione $f : x \mapsto f(x)$, mediante semplici trasformazioni geometriche si può disegnare il grafico delle seguenti funzioni:

1. $g_1(x) = f(x) + a, \quad a \in \mathbb{R},$
2. $g_2(x) = f(x + a), \quad a \in \mathbb{R},$
3. $g_3(x) = kf(x), \quad k \in \mathbb{R},$
4. $g_4(x) = f(kx), \quad k \in \mathbb{R},$

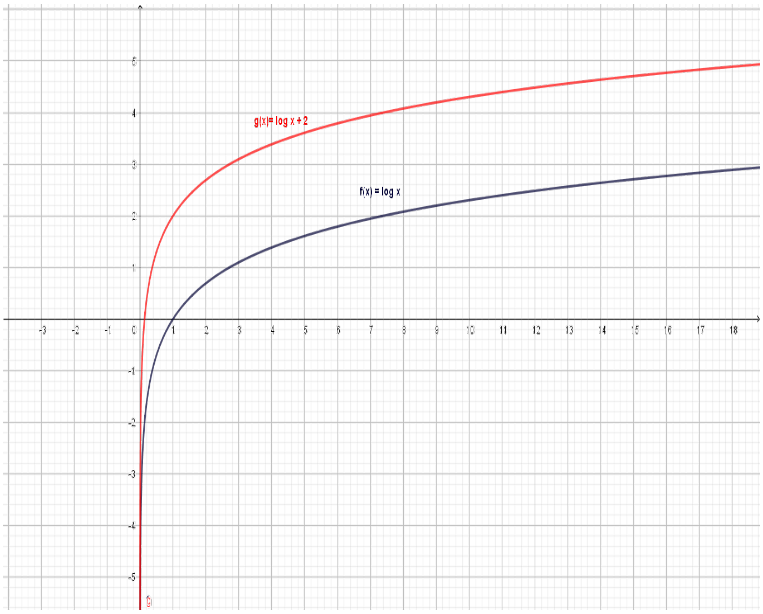
5. $g_5(x) = |f(x)|$,

6. $g_6(x) = f(|x|)$,

Inoltre più operazioni di questi tipi possono essere effettuate in sequenza.

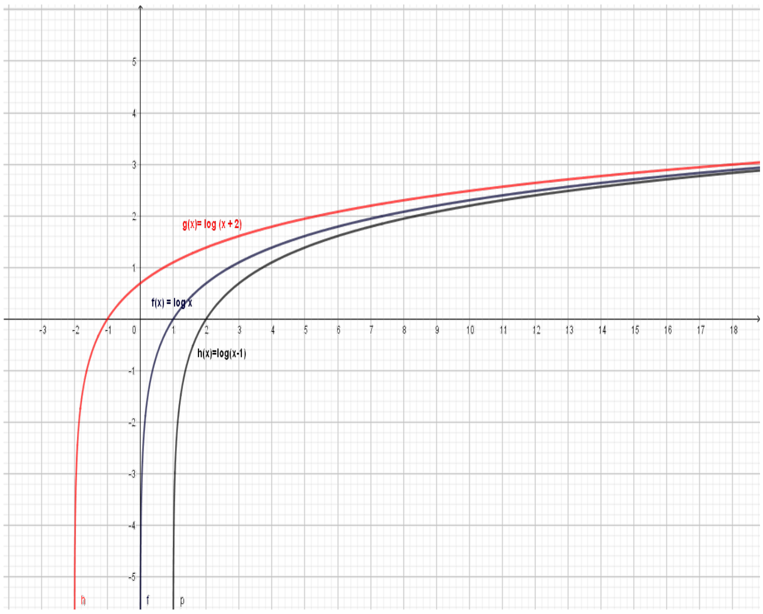
Esempio 1. Sia $f : x \mapsto \log x$.
Allora $g(x) = \log(x + a)$, $a \in \mathbb{R}$ è definita, come f, per $x > 0$ e il suo grafico si ottiene traslando il grafico di f di a verso l'alto se $a > 0$, di $-a$ verso il basso se $a < 0$. Nella figura seguente sono disegnati i grafici delle funzioni

$$f : x \mapsto f(x) = logx \qquad \text{e} \qquad g : x \mapsto logx + 2$$



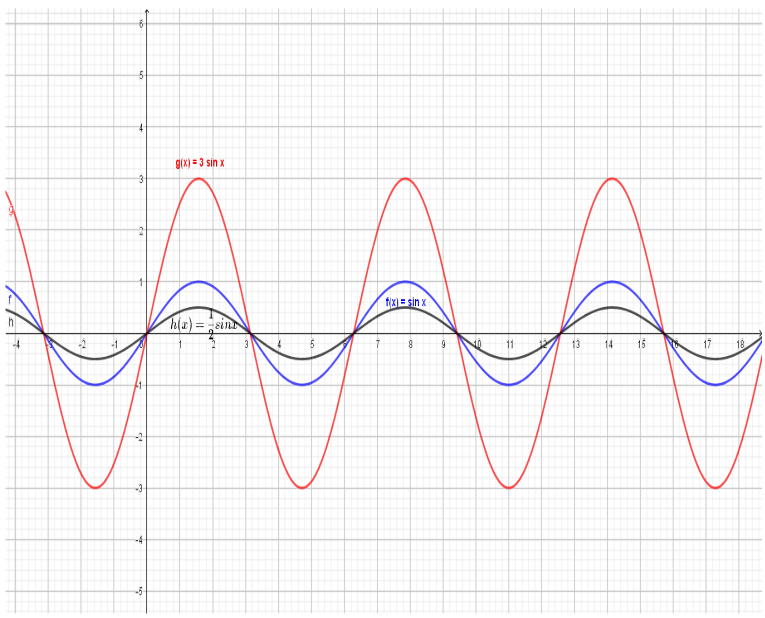
Esempio 2. Sia $f : x \mapsto \log x$.
Allora $g(x) = \log(x + a)$, $a \in \mathbb{R}$, è definita per $x > -a$ e il suo grafico si ottiene traslando il grafico di f di $|a|$ verso sinistra se $a > 0$, verso destra se $a < 0$. Nella figura seguente sono disegnati i grafici delle funzioni

$$f : x \mapsto f(x) = logx, \qquad g : x \mapsto log(x + 2) \qquad \text{e} \qquad h : x \mapsto log(x - 1)$$



Esempio 3. Sia $f : x \mapsto \sin x$.
Allora $g(x) = k \sin x$, $k \in \mathbb{R}$, è definita su tutto $\mathbb{R}$ e il suo grafico si ottiene moltiplicando per k tutte le ordinate $f(x)$. Nella figura seguente sono disegnati i grafici delle funzioni

$$f : x \mapsto f(x) = sinx, \qquad g : x \mapsto 3sinx \qquad \text{e} \qquad h : x \mapsto \frac{1}{2}sinx$$



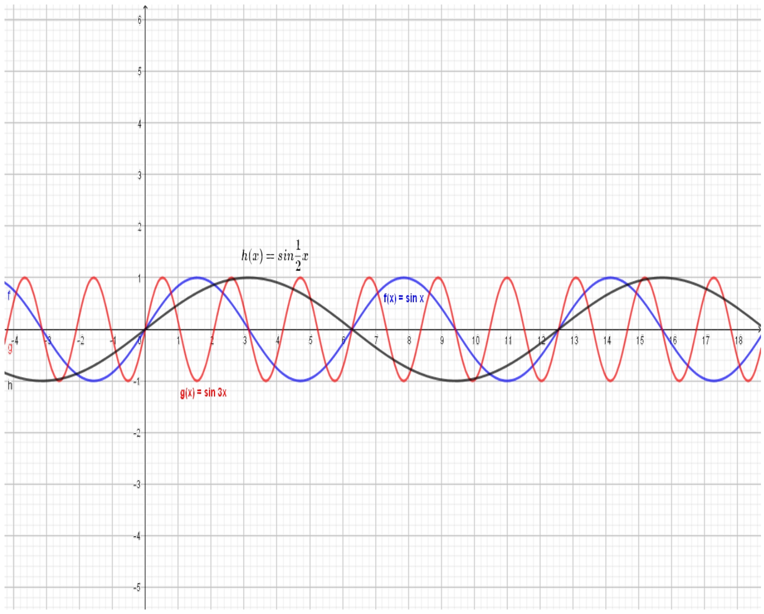
Esempio 4. Sia $f : x \mapsto f(x)$.
Allora il grafico di $g(x) = f(kx)$, $k \in \mathbb{R}$, si ottiene da quello di f con un cambiamento di scala sull'asse x.
Se $k > 1$ kx cresce più rapidamente di x ed il grafico di g è simile a quello di f ma compresso in direzione orizzontale di un fattore $\frac{1}{k}$.
Se $0 < k < 1$ il grafico di g appare dilatato in direzione orizzontale.
Se $k < 0$ ci sarà :

- una compressione sull'asse x se $|k| > 1$,

- una dilatazione sull'asse x se $|k| < 1$,
- una riflessione rispetto all'asse y se $k = -1$.

Nella figura seguente sono disegnati i grafici delle funzioni

$$f : x \mapsto f(x) = sinx, \qquad g : x \mapsto sin3x \qquad \text{e} \qquad h : x \mapsto sin\frac{1}{2}x$$

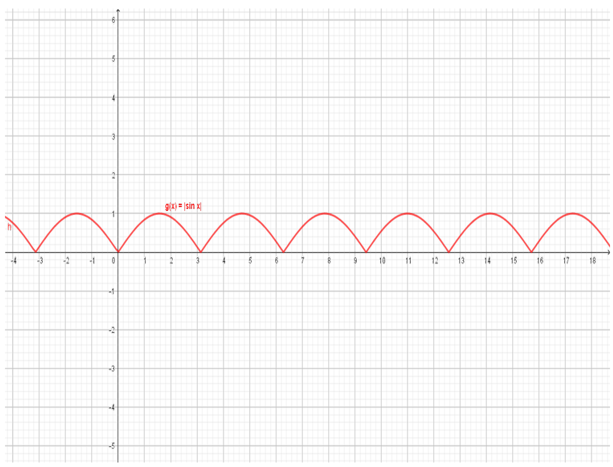


Esempio 5. Sia $f : x \mapsto f(x)$.
Per disegnare il grafico di $g(x) = |f(x)|$ ricordiamo che:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{se} \quad f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{se} \quad f(x) < 0 \end{cases}$$

Nel passare dal grafico di f a quello di $|f|$ i punti ad ordinata ≥ 0 rimangono invariati, quelli ad ordinata negativa vengono trasformati nei loro simmetrici rispetto all'asse x. Nella figura seguente è disegnato il grafico della funzione

$$g : x \mapsto |sinx|$$



Esempio 6. Sia $f : x \mapsto f(x)$.
Per disegnare il grafico di $g(x) = f(|x|)$ osserviamo che $|x| = x$ se $x > 0$, quindi nel semipiano a destra dell'asse y le funzioni f e g coincidono.
Inoltre $|-x| = |x|$, perciò il grafico di $g(x) = f(|x|)$verrà tracciato lasciando inalterato il grafico di f nel semipiano destro e ribaltandolo simmetricamente rispetto all'asse delle ordinate.

Nella figura seguente è disegnato il grafico della funzione

$$g : x \mapsto e^{|x|}$$